1 Anhang E (Erläuterungen zum Bayes-Theorem)

1.1 Vorbemerkung

Eine allgemeine mathematische Herleitung des Bayes-Theorems findet sich unter www.schriftvergleichung.com. Die folgenden Erläuterungen sollen lediglich zur Veranschaulichung der Bayes'schen Rechenvorschrift und ihrem besseren Verständnis dienen. Der Kontext des Bayes-Theorems zur Schriftvergleichung wird durch *Conrad*[1] hergestellt, der sich auf *Carnap*[2] stützt.

Wenn demnach das Bayes-Theorem im Bereich der forensischen schriftvergleichenden Untersuchungen angewendet werden kann, darf man den in der allgemeinen Herleitung verwendeten

- Term B als Befundkonstellation K
- und den Term A als Hypothesenmenge H interpretieren,

mit den folgenden semantischen Definitionen:

Befundkonstellationen K = $\{k_1, \dots, k_M\}$
lassen sich verstehen als Aussagen oder Mengen von Aussagen über die *sich aus Beobachtungen vorgängig manifester Ereignisse ergebende Wahrscheinlichkeit für eine erneute Realisierung derselben.*

Im Erfahrungsraum haben diese Aussagen die Qualität von Feststellungen beobachtbarer Tatsachen. Repräsentiert werden sie durch reelle Zahlen aus dem Intervall [0,1], die als A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten ein Maß für die relativen Häufigkeiten von Befunden darstellen.

Aufgabe des Schriftsachverständigen ist es, die Befunde der fraglichen Schrift mit den Narrativen des Auftraggebers und/oder der Beteiligten, also: Verdachte, Zweifel, Annahmen, Vermutungen, die als Hypothesen formuliert werden, zu konfrontieren. Genau wie die Befunde lassen sich Hypothesen in Teilhypothesen zerlegen, diese genügen den Axiomen der Vollständigkeit und der Normiertheit.

---

[1] *Conrad, W.*, Mannheimer Hefte für Schriftvergleichung 1 - 4/94, S. 137.

[2] *Carnap, R.*, bearbeitet von Stegmüller, W. (1959). Induktive Logik und Wahrscheinlichkeit, S. 166ff., Wien: Springer

Hypothesen H = $\{h_1, \dots , h_N\}$

lassen sich verstehen als Aussagen oder Mengen von Aussagen
über die *(vor-)bedingte Wahrscheinlichkeit zu erwartender Ereignisse*.

Im Erwartungsraum haben diese Aussagen die Qualität von Erklärungen oder Fragen zu Fiktionen. Repräsentiert werden sie durch reelle Zahlen aus dem Intervall [0,1], die als Hypothesenwahrscheinlichkeiten ein Maß für die Erwartung einer vorgestellten, noch nicht manifesten Situation darstellen.

1.2 Untersuchungsfragen und Hypothesenbildung

Schriftvergleichenden Untersuchungen können unterschiedliche Fragestellungen zugrunde liegen, die sich jeweils in anderen Hypothesen niederschlagen. Dazu ein paar Beispiele:

- Echtheitsuntersuchung (n = 2 Hypothesen):
  - H1 – Die fragliche Unterschrift stammt vom Namenseigner.
  - H2 – Die fragliche Unterschrift stammt von einer unbekannten anderen Person.
- Differenzialanalyse (n = 2 Hypothesen):
  - H1 – Die fragliche Schrift stammt eher vom Ehemann.
  - H2 – Die fragliche Schrift stammt eher von der Ehefrau.
    Eine andere Person als diese kommt nicht in Betracht.
- Urheberschaftsuntersuchung (n = 4 Hypothesen):
  - H1 – Die fragliche Unterschrift stammt von Müller.
  - H2 – Die fragliche Unterschrift stammt von Meier.
  - H3 – Die fragliche Unterschrift stammt von Schulze.
  - H4 – Die fragliche Unterschrift stammt von einer unbekannten anderen Person.
- Schriftaltersbestimmung (n = 5 Hypothesen):
  - H1 – Die fragliche Tagebuchseite stammt aus dem Jahr 2011.
  - …
  - H5 – Die fragliche Tagebuchseite stammt aus dem Jahr 2015.

1.3 Merkmale und Häufigkeiten

Nehmen wir an, in einer fraglichen Schrift liege unter anderen ein bestimmtes Merkmal M1 vor. Das Merkmal sei unauffällig und/oder willentlich schwierig zu realisieren bzw. zu beeinflussen. Es leuchtet unmittelbar ein, dass eine Person P1 umso wahrscheinlicher als Urheber der fraglichen Schrift infrage kommt, je häufiger das Merkmal auch in deren eigener Schrift vorkommt.

Dasselbe gilt aber nicht nur für das Merkmal M1, sondern es gilt in gleicher Weise auch für beliebige andere Merkmale M2, M3 … der fraglichen Schrift: Die Wahrscheinlichkeit für die Urheberschaft der Person an der fraglichen Schrift ist umso größer, je häufiger

mit dem Merkmal M1 *zugleich auch* die weiteren Merkmale M2, M3, …

in ihrer habituellen Schrift auftreten. Alle Befunde der fraglichen Schrift sind (normalerweise) quasi in einem Zuge entstanden und bilden das unabhängige „Ereignis“ der gegebenen Befundkonstellation K, wie sie sich in der fraglichen Schrift manifestiert.

In dieser Aussage steckt eine logische Und-Verknüpfung: Je häufiger die fraglichen Merkmale M1 **und** M2 **und** M3 … auch beim Schreiber P1 vorkommen, desto wahrscheinlicher ist dessen Urheberschaft.

Die logische **Und**-Verknüpfung ist eine Schwester der Multiplikation.

Bei einer binären Skalenauflösung lautet eine einfache Und-Verknüpfung etwa so: Ist ein Ereignis A zutreffend (= 1) **und** ist ein Ereignis B zutreffend (= 1), so ist das Ergebnis zutreffend (= 1). Dies entspricht der Multiplikation 1 * 1 = 1. Die Inversion lautet: Sind entweder das Ereignis A **oder** das Ereignis B oder beide Ereignisse zugleich **nicht** zutreffend (= 0), so ist das Ergebnis **nicht** zutreffend. Dies ergibt sich ebenfalls durch Multiplikation 0 * 1 = 1 * 0 = 0 * 0 = 0.

Ein Übergang von einer binären zu einer analogen Skalenauflösung liegt dann vor, wenn die Ereignisse und das Ergebnis der Verknüpfung nicht nur die Werte [0] oder [1] annehmen können, sondern wenn es sich dabei um nicht-negative, reelle Zahlen aus dem Intervall [0,1] handelt, wie es bei Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten der Fall ist (Axiom der Nichtnegativität).

Dies führt dazu, dass man die (relativen) Häufigkeiten rF der einzelnen Merkmale in der Schrift des Vergleichsschreibers miteinander zu multiplizieren hat:

$$L_{P1} = \prod_{i=1}^{n} rF(Mi) = rF(M1) * rF(M2) * rF(M2) * \dots$$

Jede relative Merkmalshäufigkeit liegt im Intervall [0,1] und kann dort alle reellen Werte annehmen. Unmittelbar sieht man: Je größer die einzelnen Faktoren sind, desto größer ist L_{P1}. Ist auch nur einer der Faktoren = 0, so ist das Ergebnis L = 0. Sind, umgekehrt, alle Faktoren = 1, so ist das Ergebnis L = 1. Dies entspricht also ganz der obigen Darstellung bei binärer Auflösung, nur eben in diesem Fall auf der analogen Skala der reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

1.4 Ähnlichkeiten (Likelihoods)

Bei dem Produkt L_{P1} handelt es sich um eine sogenannte „Likelihood". L_{P1} ist gewissermaßen eine Vorform der Hypothesenwahrscheinlichkeit, wenn man so will, eine Protowahrscheinlichkeit dafür, dass die Hypothese zutrifft, die fragliche Schrift stamme aus der Hand der Person P1. Je „ähnlicher" sich die fragliche Schrift und die Vergleichsschriften der Person P1 sind, desto größer sind die relativen Auftretenshäufigkeiten rF der einzelnen fraglichen Merkmale M_i in den Vergleichsschriften dieser Person, und desto näher kommt der Wert von L an die 1 heran.

Die Likelihood L_{P1} ist allerdings – für sich allein genommen – keine besonders aussagekräftige Zahl, denn auch die Schriften anderer Schreiber weisen eine mehr oder weniger große Likelihood zur fraglichen Schrift auf, je nachdem, wie viele der fraglichen Merkmale wie oft übereinstimmend vorliegen. Außerdem sind die Likelihoods meist sehr klein und unhandlich. Bei einer Abwägung, ob eine fragliche Schrift von der Person P1 oder von einer zweiten Person P2 stammt, muss man die Likelihoods der Schriften L_{P1} und L_{P2} der beiden Vergleichsschreiber in Relation zueinander bringen.

(Am Rande vermerkt: Der sog. „Beweiswert" eines Befundes erfüllt dies, indem er definiert wird als Quotient aus L_{P1} und L_{P2}:

$$Bw = \frac{L_{P1}}{L_{P2}}$$

Ist Bw > 1, so spricht das Auftreten der bestimmten fraglichen Befundkonstellation eher für die Person P1 als Urheber, ist Bw < 1, kommt eher P2 als Urheber in Betracht. Wohlgemerkt: Es handelt sich hierbei nicht um die vom Auftraggeber gesuchte Urheberschaftswahrscheinlichkeit!)

Um die Urheberschaftswahrscheinlichkeit zu ermitteln, ist zu berücksichtigen, dass, sofern man sich auf nur zwei Vergleichsschreiber beschränkt, die Wahrscheinlichkeit für die Urheberschaft der Person P1 und die Wahrscheinlichkeit für die Urheberschaft der Person P2 sich gegenseitig ergänzen: Letztlich kann die Summe aller einzelnen Hypothesenwahrscheinlichkeiten nicht größer als 1 sein. Dies ist axiomatisch so festgelegt (Axiom der Additivität); die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten ist 100 Prozent. Dies hat zur Folge, dass die Einzelwahrscheinlichkeit für die Urheberschaft der Person P1 wächst, wenn die für die Person P2 kleiner wird. Sie wird 0, wenn die andere 1 wird, und umgekehrt. Gibt es mehr als zwei Schreiber, gilt dasselbe entsprechend; die Summe aller einzelnen Hypothesenwahrscheinlichkeiten ist gleich 100 Prozent.

1.5 Urheberschaftswahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit p(P1) für das Zutreffen der Hypothese, dass die fragliche Schrift von der Person P1 stammt, ergibt sich, indem das Verhältnis der Likelihood L_{P1} **zur Summe** aller Likelihoods gebildet und mit 100 multipliziert wird:

$$p(P1) = \frac{L_{P1}}{\sum_{j=1}^{n} L_{Pj}} * 100$$

Die Normierung mit der Summe der Likelihoods im Nenner führt praktischerweise dazu, dass die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten $\sum_{i=1}^{n} p(Pi) = 100$ wird. Durch Multiplikation mit dem Faktor 100 wird das Intervall des Wertebereiches für die Wahrscheinlichkeiten auf [0, 100] Prozent transformiert. n ist dabei die Anzahl der Hypothesen bzw. je nach Fragestellung die Anzahl der Urheber.

Anzumerken ist noch, dass es in seltenen Fällen Konstellationen gibt, in denen durch A-priori-Abwägungen eine sog. Anfangswahrscheinlichkeit p(A) für die verschiedenen Hypothesen in Betracht zu ziehen ist. In derartigen Fällen werden die Likelihoods mit den zugehörigen Anfangswahrscheinlichkeiten multipliziert: Einzusetzen ist statt L_{P1} also $p(A_{P1}) * L_{P1}$ bzw. statt L_{Pj} das Produkt $p(A_{Pj}) * L_{Pj}$. Aus Gründen der Unbefangenheit hat der Sachverständige jedoch davon auszugehen, dass alle möglichen zu betrachtenden Hypothesen a priori gleich wahrscheinlich sind, dass also gilt $p(A_i) = p(A) = p(A_j)$ für alle i und für alle j. In der Bayes'schen Produktformel kürzt sich das raus, so dass die obige Formel bestehen bleibt.

1.6 Der Rechenalgorithmus

Bei einer Zwei-Hypothesen-Untersuchung (s. erstes und zweites Beispiel S. 1) läuft die Berechnung

- der Wahrscheinlichkeit p(P1) für die Urheberschaft des bekannten Vergleichsschreibers P1
- gegenüber der Wahrscheinlichkeit p(P2), dass eine andere Person Urheber der fraglichen Schrift ist

in den folgenden Schritten ab:

1. Zunächst werden die relevanten fraglichen Merkmale M_i beschrieben.
2. Dann wird abgezählt , wie oft diese in den Vergleichsschriften der Person P1 auftreten bzw. nicht auftreten,
3. Daraus werden die relativen Häufigkeiten $rF(M_i)$ und
4. das Produkt $L_{P1} = \prod_{i=1}^{n} rF(Mi)$ aus allen diesen relativen Häufigkeiten berechnet.
5. Zudem wird festgestellt, wie groß die relativen Häufigkeiten der fraglichen Merkmale in den Vergleichsschriften des anderen Schreibers P2 sind.
6. Wie zuvor wird aus diesen relativen Häufigkeiten auch das Produkt L_{P2} berechnet.
7. Schließlich ist die Summe $L_{P1} + L_{P2}$ der Produkte zu bilden und
8. die Hypothesenwahrscheinlichkeit p(P1) als Quotient $L_{P1} / (L_{P1} + L_{P2})$ zu berechnen.
9. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die andere Person als Urheber der fraglichen Schrift infrage kommt, errechnet sich hierzu analog als
   $p(P2) = L_{P2} / (L_{P1} + L_{P2})$.