

1 Anhang E (Erläuterungen zum Bayes-Theorem)

1.1 Vorbemerkung

Eine kontextbezogene mathematische Herleitung des Bayes-Theorems findet sich unter www.schriftvergleichung.com. Die folgenden Erläuterungen sollen lediglich zur Veranschaulichung der Bayes'schen Rechenvorschrift und ihrem besseren Verständnis dienen.

1.2 Untersuchungsfragen und Hypothesenbildung

Schriftvergleichenden Untersuchungen können unterschiedliche Fragestellungen zugrunde liegen, die sich jeweils in anderen Hypothesen niederschlagen. Dazu hier ein paar Beispiele:

- Echtheitsuntersuchung (n = 2 Hypothesen):
 - H1 – die fragliche Unterschrift stammt vom Namenseigner
 - H2 – die fragliche Unterschrift stammt von einer anderen Person
- Urheberschaftsuntersuchung (n = 3 Hypothesen):
 - H1 – die fragliche Unterschrift stammt von Müller
 - H2 – die fragliche Unterschrift stammt von Meier
 - H3 – die fragliche Unterschrift stammt von Schulze
- Schriftaltersbestimmung (n = 5 Hypothesen):
 - H1 – die fragliche Tagebuchseite stammt aus dem Jahr 2011
 - ...
 - H5 – die fragliche Tagebuchseite stammt aus dem Jahr 2015

1.3 Merkmale und Häufigkeiten

Nehmen wir an, in einer fraglichen Schrift liege unter anderen ein bestimmtes Merkmal M1 vor. Es leuchtet unmittelbar ein, dass eine Person P1 umso wahrscheinlicher als Urheber der fraglichen Schrift infrage kommt, je häufiger das Merkmal M1 auch in deren eigener Schrift vorkommt.

Dasselbe gilt aber nicht nur für das Merkmal M1, sondern es gilt in gleicher Weise auch für beliebige andere Merkmale M2, M3 ... der fraglichen Schrift: Die Wahrscheinlichkeit für die Urheberschaft der Person an der fraglichen Schrift ist umso größer, je häufiger mit dem Merkmal M1 zugleich auch die weiteren Merkmale M2, M3, ... in ihrer habituellen Schrift auftreten.

In dieser Aussage steckt eine logische Und-Verknüpfung: Je häufiger die fraglichen Merkmale **M1 und M2 und M3 ...** auch beim Schreiber P1 vorkommen, desto wahrscheinlicher ist dessen Urheberschaft.

Die logische **Und**-Verknüpfung ist eine Schwester der Multiplikation.

Bei einer binären Skalenauflösung lautet eine einfache Und-Verknüpfung etwa so: Ist ein Ereignis A zutreffend (= 1) **und** ist ein Ereignis B zutreffend (= 1), so ist das Ergebnis zutreffend (= 1). Dies entspricht der Multiplikation $1 * 1 = 1$. Die Inversion lautet: Sind entweder das Ereignis A **oder** das Ereignis B oder beide Ereignisse zugleich **nicht** zutreffend (= 0), so ist das Ergebnis **nicht** zutreffend. Dies ergibt sich ebenfalls durch Multiplikation $0 * 1 = 1 * 0 = 0 * 0 = 0$.

Ein Übergang von einer binären zu einer analogen Skalenauflösung liegt dann vor, wenn die Ereignisse und das Ergebnis der Verknüpfung nicht nur die Werte [0] oder [1] annehmen können, sondern wenn es sich dabei um nicht-negative, reelle Zahlen aus dem Intervall [0,1] handelt, wie es bei Häufigkeiten und Wahrscheinlichkeiten der Fall ist (Axiom der Nichtnegativität).

Dies führt dazu, dass man die (relativen) Häufigkeiten h der einzelnen Merkmale in der Schrift des Vergleichsschreibers miteinander zu multiplizieren hat:

$$L_{P1} = \prod_{i=1}^n h(M_i) = h(M1) * h(M2) * h(M2) * \dots$$

Jede relative Merkmalshäufigkeit liegt im Intervall [0,1] und kann dort alle reellen Werte ≥ 0 annehmen. Unmittelbar sieht man: Je größer die einzelnen Faktoren sind, desto größer ist L . Ist auch nur einer der Faktoren = 0, so ist das Ergebnis $L = 0$. Sind, umgekehrt, alle Faktoren = 1, so ist das Ergebnis $L = 1$. Dies entspricht also ganz der obigen Darstellung bei binärer Auflösung, nur eben hier auf der analogen Skala der reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

1.4 Ähnlichkeiten (Likelihoods)

Bei dem Produkt L_{P1} handelt es sich um eine sogenannte „Likelihood“ (= „Ähnlichkeit“). L_{P1} ist gewissermaßen eine Vorform der Hypothesenwahrscheinlichkeit, wenn man so will, eine Protowahrscheinlichkeit dafür, dass die Hypothese zutrifft, die fragliche Schrift stamme aus der Hand der Person P1. Je ähnlicher sich die fragliche Schrift und die Vergleichsschriften der Person P1 sind, desto größer sind die relativen Auftretenshäufigkeiten h der einzelnen fraglichen Merkmale M_i in den Vergleichsschriften dieser Person, und desto näher kommt der Wert von L an die 1 heran, und umgekehrt.

Die „Ähnlichkeit“ L_{P1} ist allerdings – für sich allein genommen – keine besonders aussagekräftige Zahl, denn auch die Schriften anderer Schreiber weisen eine mehr oder weniger große „Ähnlichkeit“ zur fraglichen Schrift auf, je nachdem, wie viele der fraglichen Merkmale wie oft übereinstimmend vorliegen. Bei einer Abwägung, ob eine

fragliche Schrift von der Person P1 oder von einer zweiten Person P2 stammt, muss man die „Ähnlichkeiten“ der Schriften L_{P1} und L_{P2} der beiden Vergleichsschreiber in Relation zueinander bringen.

(Am Rande vermerkt: Der sog. „Beweiswert“ eines Befundes erfüllt dies, indem er definiert wird als Quotient aus L_{P1} und L_{P2} . Dabei handelt es sich um die Wahrscheinlichkeit einer bestimmten Befundkonstellation bei einem Schreiber P1 zur Wahrscheinlichkeit des Auftretens derselben Befundkonstellation bei einem anderen Schreiber P2:

$$B = \frac{L_{P1}}{L_{P2}}$$

Ist $B > 1$, so spricht das Auftreten der bestimmten Befundkonstellation eher für die Person P1 als Urheber, ist $B < 1$, kommt eher P2 als Urheber in Betracht. Wohlgedacht: Es handelt sich hierbei nicht um die vom Auftraggeber gesuchte Urheberschaftswahrscheinlichkeit!

Um die Urheberschaftswahrscheinlichkeit zu ermitteln, ist zu berücksichtigen, dass, sofern man sich auf nur zwei Vergleichsschreiber beschränkt, die Wahrscheinlichkeit für die Urheberschaft der Person P1 und die Wahrscheinlichkeit für die Urheberschaft der Person P2 sich gegenseitig ergänzen: Letztlich kann die Summe aller einzelnen Hypothesenwahrscheinlichkeiten nicht größer als 1 sein. Dies ist axiomatisch so festgelegt (Axiom der Additivität); die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten ist 1 bzw. 100 Prozent. Hieraus wird klar, dass es sich um bedingte Wahrscheinlichkeiten handelt. Die Einzelwahrscheinlichkeiten bedingen sich insofern gegenseitig, als diejenige für die Urheberschaft von P1 wächst, wenn die für P2 kleiner wird. Sie wird 0, wenn die andere 1 wird, und umgekehrt. Gibt es mehr als zwei Schreiber, gilt dasselbe entsprechend.

1.5 **Wahrscheinlichkeiten**

Die Wahrscheinlichkeit W_{P1} für das Zutreffen der Hypothese, dass die fragliche Schrift von der Person P1 stammt, ergibt sich, indem das Verhältnis der Likelihood L_{P1} **zur Summe** aller Likelihoods gebildet wird:

$$W_{P1} = \frac{L_{P1}}{\sum_{j=1}^n L_{Pj}} * 100$$

Die Normierung mit der Summe der Likelihoods im Nenner führt praktischerweise dazu, dass die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten $\sum_{i=1}^n W_{Pi} = 1$ wird. Durch Multiplikation mit dem Faktor 100 wird das Intervall des Wertebereiches für die

Wahrscheinlichkeiten auf $[0, 100]$ Prozent transformiert. n ist dabei die Anzahl der Hypothesen bzw. je nach Fragestellung die Anzahl der Urheber.

Anzumerken ist noch, dass es in seltenen Fällen Konstellationen gibt, in denen durch A-priori-Abwägungen eine sog. Anfangswahrscheinlichkeit A für die verschiedenen Hypothesen in Betracht zu ziehen ist. In derartigen Fällen werden die Likelihoods mit den zugehörigen Anfangswahrscheinlichkeiten multipliziert: Einzusetzen ist statt L_{P_i} also $A_{P_i} * L_{P_i}$ bzw. statt L_{P_j} das Produkt $A_{P_j} * L_{P_j}$. Aus Gründen der Unbefangenheit hat der Sachverständige jedoch davon auszugehen, dass alle möglichen zu betrachtenden Hypothesen a priori gleich wahrscheinlich sind, dass also gilt $A_i = A_j = A$ für alle i und für alle j , was sich rauskürzt, so dass die obige Formel bestehen bleibt.

1.6 **Der Rechenalgorithmus**

Bei einer Echtheitsuntersuchung (s. erstes Beispiel S. 1) läuft die Berechnung

- der Wahrscheinlichkeit W_P für die Urheberschaft des bekannten Vergleichsschreibers P
- gegenüber der Wahrscheinlichkeit, dass eine unbekannte andere Person Urheber der fraglichen Schrift ist

in den folgenden Schritten ab:

1. Zunächst werden die relevanten fraglichen Merkmale M_i beschrieben.
2. Dann wird abgezählt, wie oft diese in den Vergleichsschriften der Person P auftreten bzw. nicht auftreten,
3. Daraus werden die relativen Häufigkeiten $h(M_i)$ und
4. das Produkt LP aus allen relativen Häufigkeiten LP_j berechnet,
5. Zudem wird festgestellt, wie groß die relativen Häufigkeiten der fraglichen Merkmale in den Vergleichsschriften von vielen anderen Schreibern sind.
6. Wie zuvor wird das Produkt LV auch aus diesen relativen Häufigkeiten berechnet.
7. Schließlich ist die Summe $LP + LV$ der Produkte zu bilden und
8. die genannte Wahrscheinlichkeit WP als Quotient $LP / (LP + LV)$ zu berechnen.